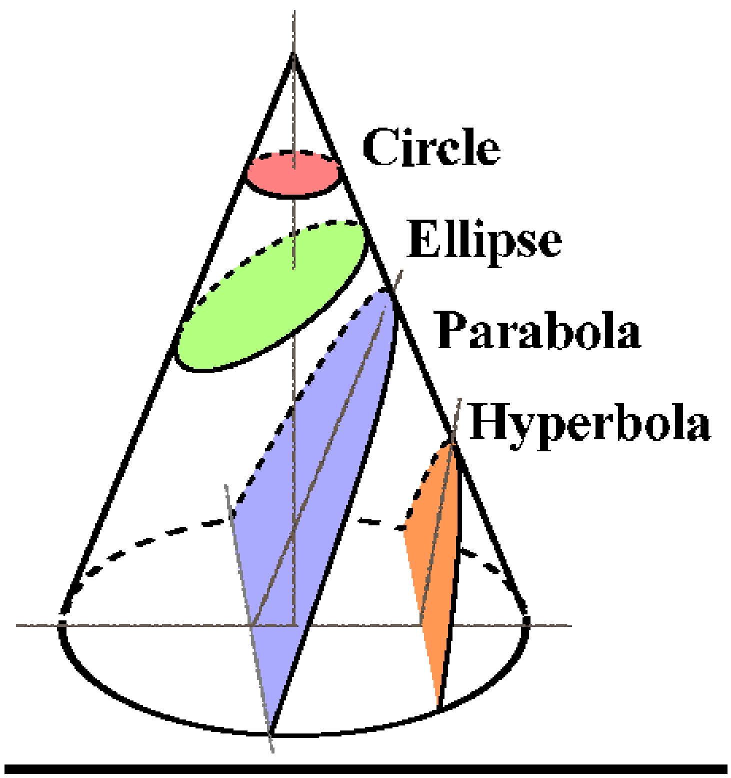
חתכי החרוט---Conic Sections



כמו <u>הפאונים המשוכללים</u> כך גם חתכי החרוט עוררו עניין רב מאז תחילת המתימטיקה.

<u>הספר ה-12 של Euclides, Elements</u> עסק בגופים מרחביים כגון חרוטים וכדורים, אך לא בחתכים.

ישנן עדויות על ארבעה כרכים שכתב Euclides על חתכי החרוט—אך דבר לא נשמר מהם.

היסטוריה קצרה של לימוד חתכי החרוט

1) Apollonius of Pergaeus (262-192 BC) כתב שמונה ספרים על הנושא, שבהם התקרב מאוד לשיטות של הגיאומטריה האנליטית. הוא גם טבע את המונחים: אליפסה, פרבולה , היפרבולה.

הספרים תורגמו לערבית במאה התשיעית ובהמשך מערבית ללטינית ושימשו השראה ל-

Kepler, Descartes, Newton.... (ניוטון ב- Principia הניח ידיעה של העובדות המובאות בספרים אלו).

2) Omar Khayyam (1048-1131) היה מתימטיקאי ומשורר פרסי אשר ספרו החשוב

Treatise on Demonstration of Problems of Algebra

השתמש בתכונות חתכי החרוט (בעקבות התרגום לערבית) על מנת לתת פתרונות גיאומטריים למשוואות מהמעלה השלישית.

שיר מתוך "מרובעים":

מַעְגָּל זֶה שֶׁהוּא בּוֹאֵנוּ וְעֶבְרֵנוּ,
לֹא רֹאשׁ וְלֹא סוֹף בּוֹ רָאִינוּ.
אִישׁ עַל סוֹד זֶה אֱמֶת לֹא אָמַר,
מֵאַיִן בָּאנוּ וּלְאָן מוּעָדוֹת פָּנֵינוּ ?

(תרגום י' אברהמוף)

3) Kepler, קבע כי מסלולי כוכבי הלכת הם אליפסות. ניוטון השתמש בחשבון הדיפרנציאלי והגיע לכך מתוך חוק הכבידה—הישג מונומנטלי של ביסוס הפיסיקה על חוקיות מתמטית.

4) Blaise Pascal(1623-1662)

א) בגיל 16 (!) כתב את מחקרו החשוב

Essai pour les coniques (*Essay on Conic Sections*)

הכולל את משפט פסקל המפורסם (יופיע בהמשך...).

Descartes סירב להאמין כי אכן הנער כתב את המאמר...

לצורך זה הוא שיכלל את הגיאומטריה הפרוייקטיבית אשר פותחה על ידי

Desargues (1591–1661) Kepler (1571–1630)

מקרה פרטי הוא משפט Pappus הקלסי, שאותו נראה להלן.

ב) עם Pierre de Fermat (1601-1665)

הניח את היסודות לתורת ההסתברות (למשל, "משולש פסקל").

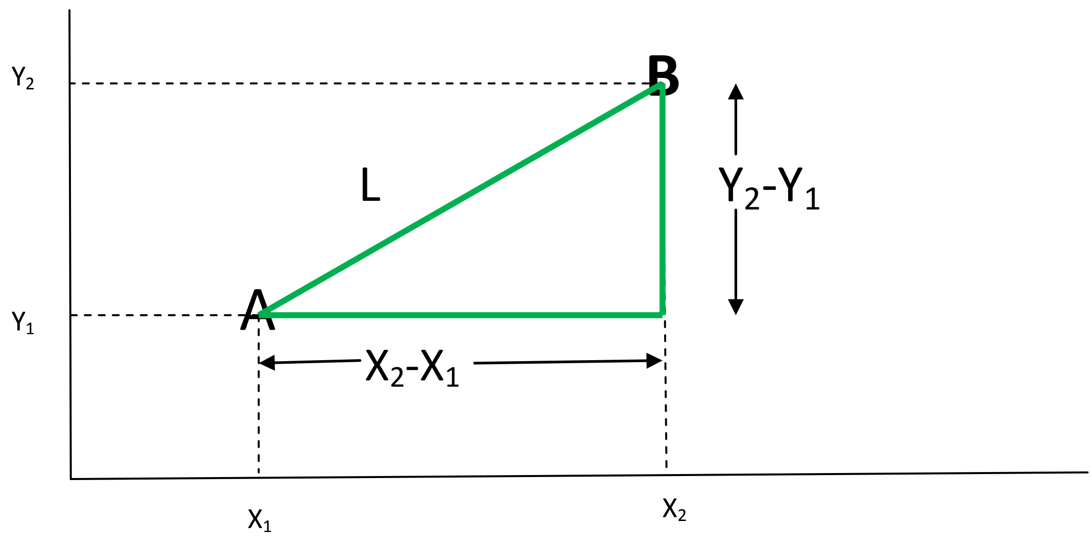
ג) ספרו התיאולוגי ***Pensées*** נחשב לאחת מיצירות המופת של הספרות הצרפתית.

נוסחת המרחק במישור הקרטזי

צריך לחשב את המרחק L בין הנקודות

$A(X_1,Y_1)$, $B(X_2,Y_2)$ במישור הקרטזי.

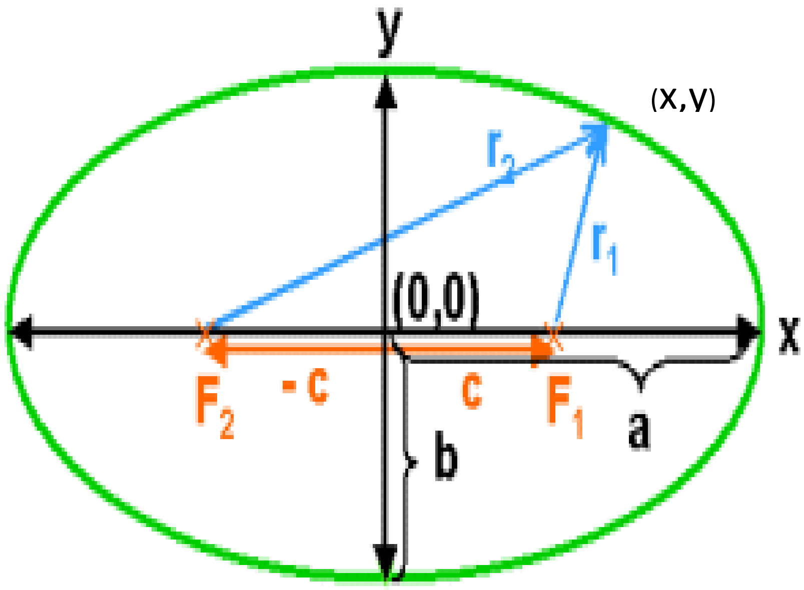
זאת נעשה בעזרת משפט פיתגורס:



$$L^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2$$

$$\boxed{L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}}$$

הגדרת האליפסה



אוסף הנקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות מוקד F_1,F_2 הוא קבוע ושווה ל- 2a.

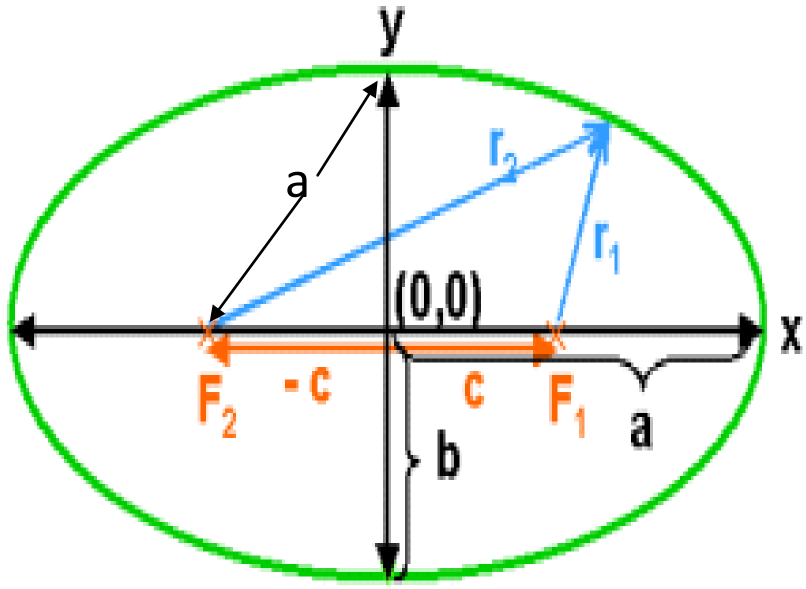
$$r_1^2=(x-c)^2+y^2$$

$$r_2^2=(x+c)^2+y^2$$

מחסרים את המשוואה הראשונה מן השניה:

$$r_2^2-r_1^2=(r_1+r_2)(r_2-r_1)=2a(r_2-r_1)=4cx$$

$$\boxed{r_2^2 - r_1^2 = (r_1 + r_2)(r_2 - r_1) = 2a(r_2 - r_1) = 4cx}$$



כלומר , קיבלנו צמד משוואות לנעלמים r_1,r_2 :

$$r_2 + r_1 = 2a, \qquad r_2 - r_1 = \frac{2cx}{a}$$

שפתרונן:

$$r_2 = a + \frac{cx}{a}, \qquad r_1 = a - \frac{cx}{a}$$

ולכן יש לנו שני ביטויים ל- r_2^2 :

$$r_2^2 = (x+c)^2 + y^2 = (a + \frac{cx}{a})^2$$

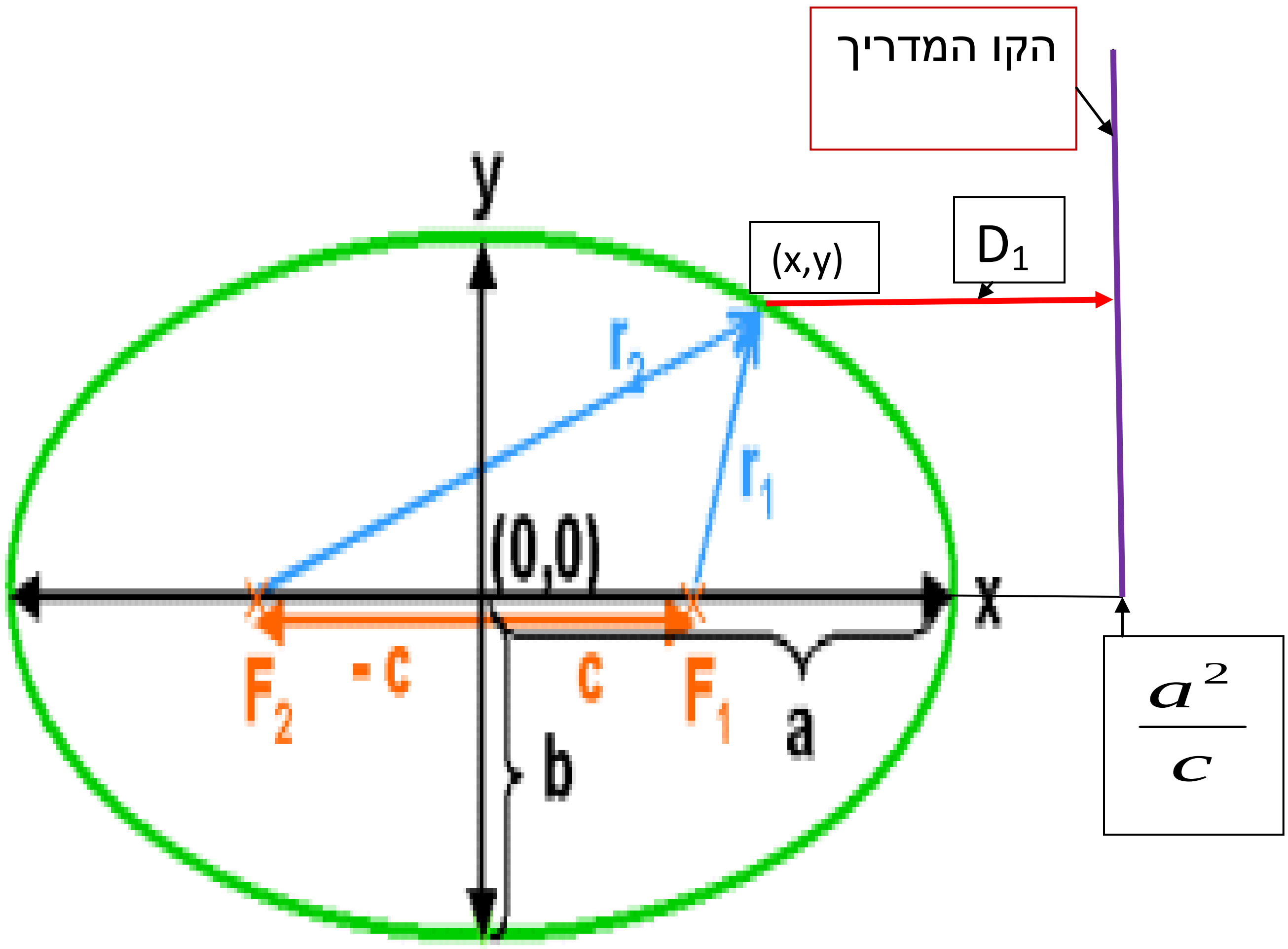
ובפתיחת סוגריים וכינוס איברים (נשים לב כי בכל צד קיים איבר 2cx המתבטל):

$$y^2 + \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 = a^2 - c^2 = b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

זוהי משוואת האליפסה.

אם a=b מתקבל <u>מעגל ברדיוס</u> a .

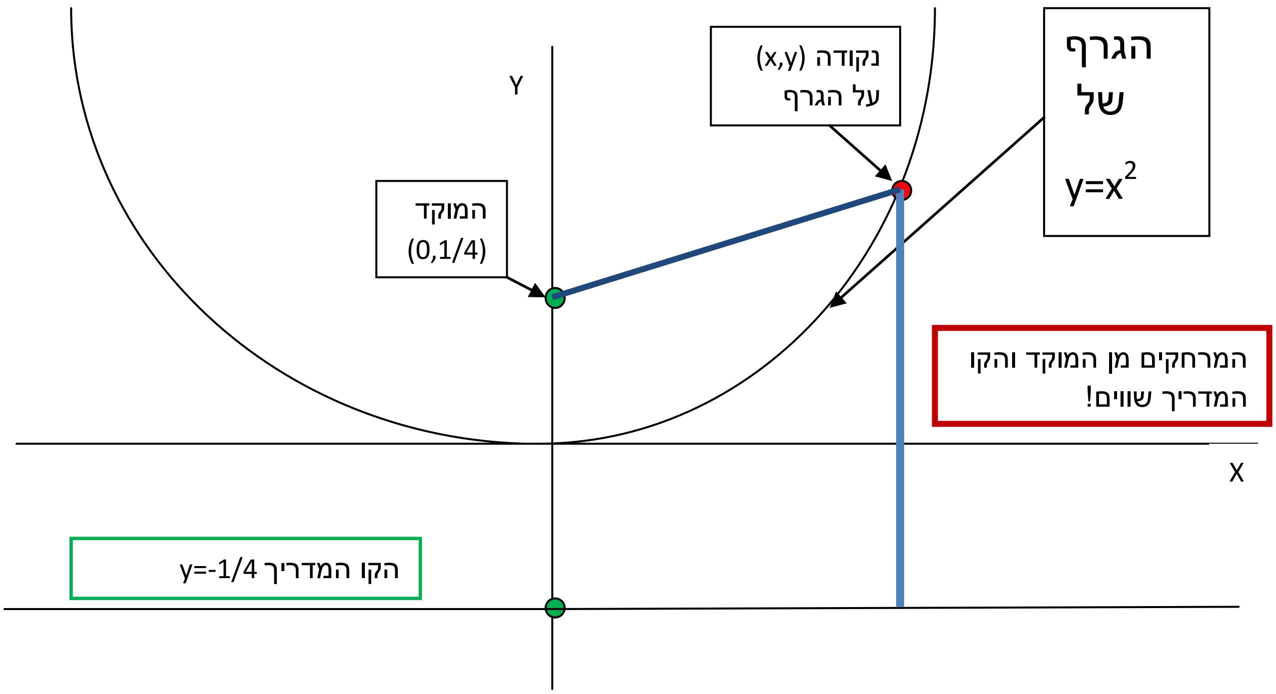


ראינו $\boxed{r_1 = a - \frac{cx}{a}}$ וגם רואים מהציור

$$\boxed{D_1 = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a}{c}\left(a - \frac{cx}{a}\right) = \frac{a}{c} r_1}$$

תכונת האליפסה: היחס בין המרחקים לקו המדריך ולמוקד הוא קבוע.

תכונה כזאת מתקיימת גם במקרה של פרבולה.



ריבוע מרחק הנקודה על הגרף מהקו המדריך:

$$\left(y+\frac{1}{4}\right)^2 = y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}$$

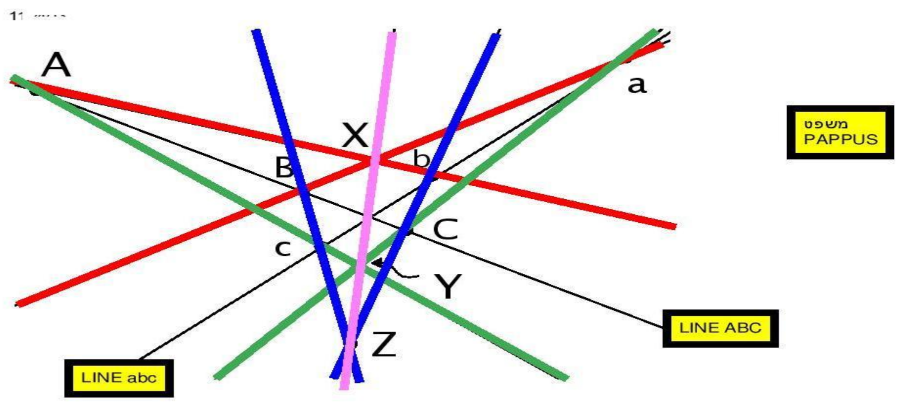
ריבוע מרחק הנקודה על הגרף מן המוקד:

$$x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2 = y+y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{16} = y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}$$

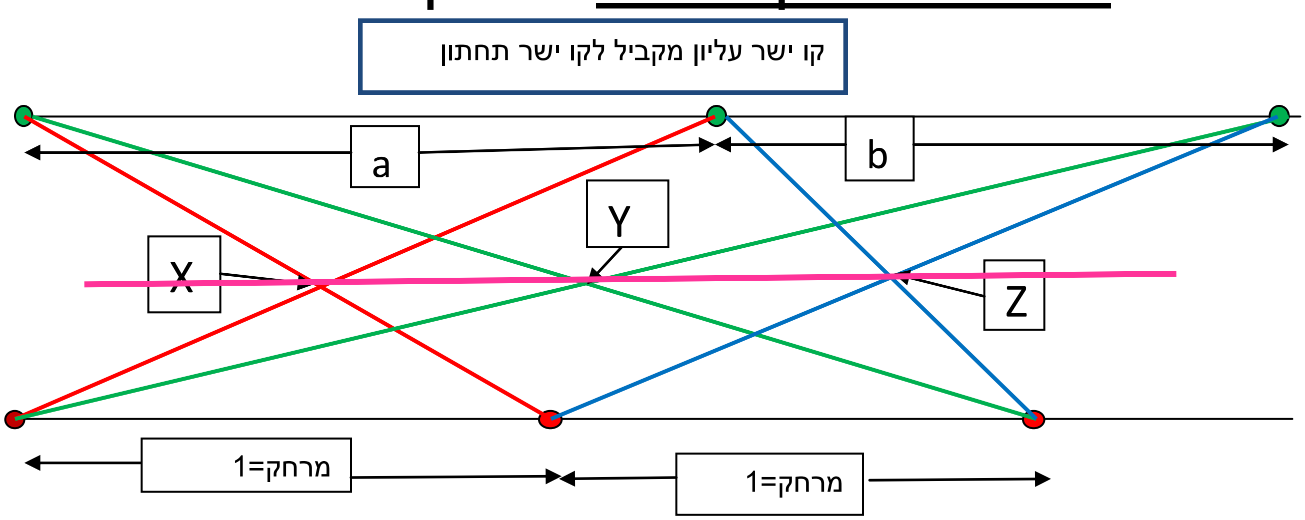
נשים לב כי הנקודה על הגרף ולכן $x^2=y$.

משפט Pappus (בערך 320 לספירה, אלכסנדריה)

שלוש נקודות החיתוך X,Y,Z תמיד על קו אחד.



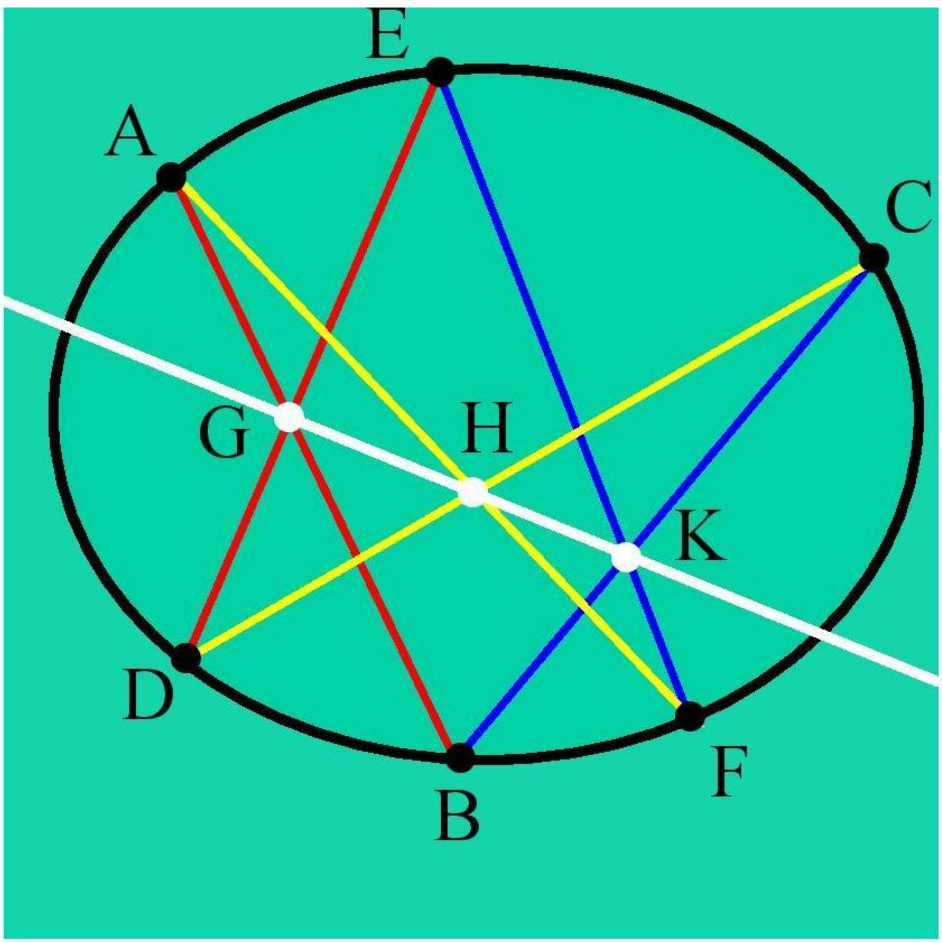
על ידי הטלה פרויקטיבית מספיק להוכיח :



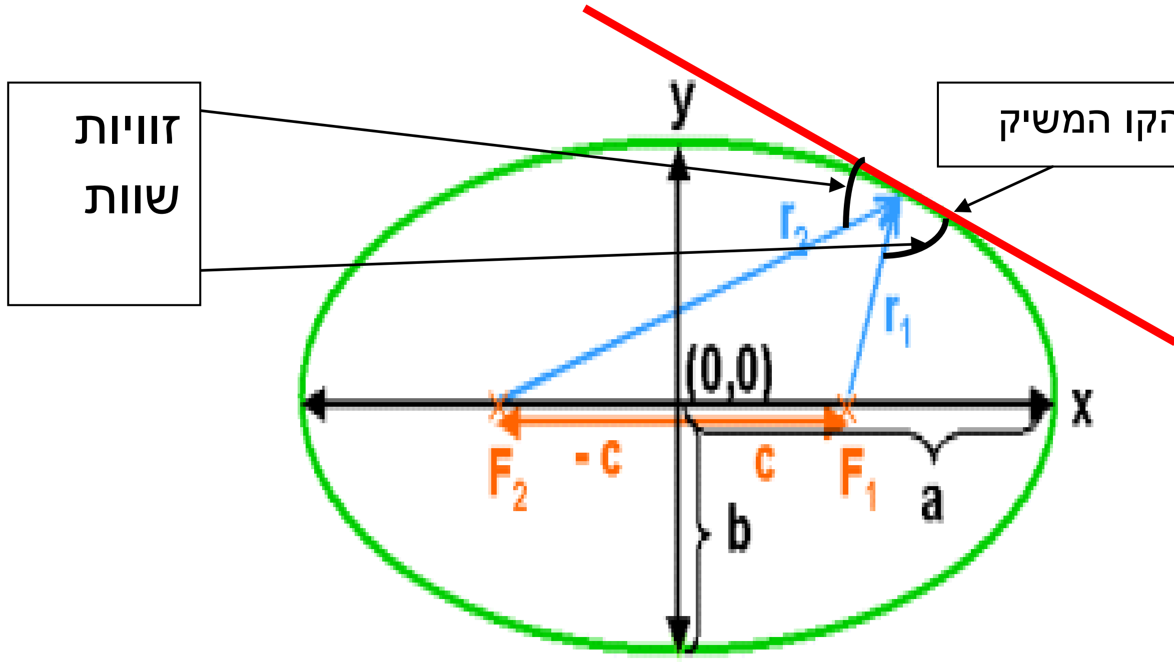
המשפט של Pascal (בהיותו בן 16):

Hexagrammum Mysticum (המשושה המיסטי)

על האליפסה נתונות נקודות A,B,C,D,E,F בסדר כלשהו. חותכים את הקווים AB ו-DE, BC ו-EF, CD ו-FA ומקבלים כי שלוש נקודות החיתוך נמצאות על קו ישר (הקרוי קו פסקל)



תכונה נוספת של האליפסה:



קרן אור היוצאת ממוקד אחד מוחזרת מן האליפסה אל המוקד השני.

שאלה: מדוע זווית ההחזרה של קרן האור חייבת להיות שווה לזווית הפגיעה?

תשובה: המסלול של קרן האור בין שתי נקודות הוא בעל אורך מינימלי! הקו השחור הוא הקצר ביותר